

# Modellierung zweier Quantensuchprozesse mit der Polarisationsoptik

E.Frins\*, B.Hils, H.Schmitzer\*\*, W.Dultz

Universidad de la República Montevideo\*, Xavier Univ. Cincinnati\*\*, Univ. Frankfurt(Main)

requilivahanus(affenschaukel)t-online.de

Suchprozesse in Datenbanken könnten mit Quantenrechnern schneller ausgeführt werden. Dazu muß man die entsprechenden Quantenalgorithmen technisch realisieren. Wir schlagen eine optische Implementierung mit Hilfe von doppelbrechenden Platten vor.

Quantensuchalgorithmen führen den geeigneten Anfangszustand  $|s\rangle$  eines N-dimensionalen Quantensystems mit der Zeit in den gesuchten Endzustand  $|w\rangle$ , der Lösung, über. Dazu wird im wichtigsten Schritt, dem Orakel, die Lösungskomponente in  $|s\rangle$  erkannt und so markiert, daß sie im nachfolgenden Schritt auf Kosten der Nichtlösungen wächst.

## Grover-Algorithmus

Der Grover-Algorithmus besteht aus einzelnen diskontinuierlichen Rechenschritten. Bei jedem Schritt wird der Grover-Operator  $\hat{G} = \hat{U}_s \hat{O}$  auf den Zustand  $\hat{G}^{n-1}|s\rangle$  angewandt, bis der Anfangszustand  $|s\rangle$  in den gesuchten Zustand  $|w\rangle$  übergeführt ist.  $|s\rangle$  muß die Lösung  $|w\rangle$  als Komponente enthalten.

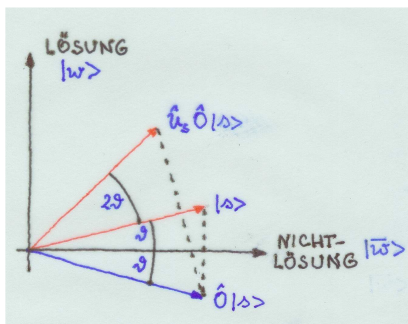


Abb.1 Grover-Algorithmus, Erster Schritt

Die Suche nach  $|w\rangle$  wird in dem 2-dimensionalen Unterraum vorgenommen, der durch  $|w\rangle$  und  $|s\rangle$  aufgespannt wird. Als orthonormale Basis dient die Lösung  $|w\rangle$  und die Nichtlösung

$$|\bar{w}\rangle = 1/\sqrt{1-\langle s|w\rangle^2} (|s\rangle - \langle s|w\rangle|w\rangle),$$

$\langle s|w\rangle = \sin \vartheta$ . Der Algorithmus ist zyklisch und muß an einer Stelle nahe  $|w\rangle$  angehalten werden, die man durch Messungen von  $\langle s|\hat{G}^n|s\rangle$  finden kann. *Geometrische Veranschaulichung*[1]: Im n-ten Schritt erkennt das Orakel Element  $\hat{O} = 1 - 2|w\rangle\langle w|$  die Lösung und versieht die Komponente  $|w\rangle$  in  $\hat{G}^{n-1}|s\rangle$  mit dem Faktor „-1“ d.h.  $\hat{O}$  reflektiert  $\hat{G}^{n-1}|s\rangle$  an der Überlagerung von Nichtlösungen in  $|s\rangle$ .

$\hat{U}_s = 2|s\rangle\langle s| - 1$  reflektiert dann den Zustand  $\hat{O}\hat{G}^{n-1}|s\rangle$  am Zustand  $|s\rangle$ , Abb.1. Die physikalische Realisierung des Grover-Algorithmus durch einen Stapel von  $\lambda/2$  Verzögerungsplatten, die abwechselnd in die Polarisationsrichtungen  $|w\rangle$  und  $|s\rangle$  orientiert sind, ist daher naheliegend. Eine optische Implementierung des Grover-Algorithmus in einer etwas anderen Form gelang Bhattacharya et al.[2].

## Farhi-Gutmann-Algorithmus

Dieser Quantensuchprozess [3] ist kontinuierlich und kann ebenfalls mit Hilfe der Polarisationsoptik implementiert werden. Er benutzt einen Treiber-Hamiltonoperator

$$H_D = E|s\rangle\langle s|,$$

der den selben Eigenwert wie

$$H_w = E|w\rangle\langle w|$$

des gesuchten Zustandes  $|w\rangle$  hat. Der Anfangszustand  $|s\rangle$  entwickelt sich unter dem Einfluß des Zeitentwicklungsoperators

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\frac{H}{\hbar}t)$$

im System  $H = H_w + H_D$  mit der Zeit in den gesuchten Zustand  $|w\rangle$ ,  $x = \langle s|w\rangle = \cos \delta/2$

$$H = E \begin{pmatrix} 1+x^2, x\sqrt{1-x^2} \\ x\sqrt{1-x^2}, 1-x^2 \end{pmatrix}. \text{ Wir entwickeln } H$$

nach den Paulimatrizen  $\hat{\sigma}$  und finden  $\hat{U}(t)|s\rangle = \exp(-iEt/\hbar)\exp(-iEt/\hbar x\vec{n}\hat{\sigma})|s\rangle$  mit  $\vec{n} = (\sqrt{1-x^2}, 0, x)$ . Damit hat  $\hat{U}(t)|s\rangle$  die Form einer Rotation des Qbits  $|s\rangle = x|w\rangle + \sqrt{1-x^2}|\bar{w}\rangle$  um die Drehachse  $\vec{n}$  mit dem Drehwinkel  $\Delta = -2Et/\hbar x$  auf der Poincaré-Kugel, Abb.2.  $|w\rangle, |\bar{w}\rangle$  interpretieren wir jetzt als die Polarisationszustände an den Polen der Kugel, den Anfangszustand  $|s\rangle$  als den Polarisationszustand des Lichtes am Beginn des Suchprozesses[4].

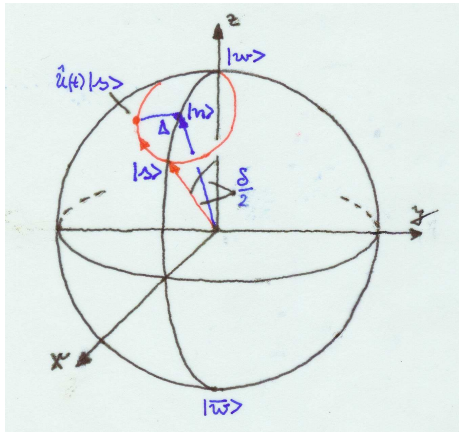


Abb. 2 Darstellung des Farhi-Gutmann-Algorithmus auf der Poincaré-Kugel

Drücken wir die Drehachsenorientierung  $\vec{n}$  durch die Stokesvektoren  $\vec{s}, \vec{w}$  aus, so finden wir  $\hat{U}(t)|s\rangle = \exp(i\Delta/2x)\exp(i\Delta/4x\{\vec{s} + \vec{w}\}\hat{\sigma})|s\rangle$ . Da die Paulimatrizen nicht miteinander vertauschbar sind, können wir den Prozeß nicht in zwei getrennte Rotationen um die Achsen  $\vec{s}, \vec{w}$  auf der Poincaré-Kugel zerlegen. Dies geht erst, wenn wir die beiden makroskopischen Rotationen in eine Summe von Rotationen mit infinitesimalen Drehwinkeln

$$\Delta = \sum_1^n d\Delta_i \text{ zerlegen.}$$

$$\hat{U}(t)|s\rangle = \exp(i\Delta/2x) [\exp(i d\Delta/4 \vec{s} \hat{\sigma}) \times \exp(i d\Delta/4x \vec{w} \hat{\sigma})]^n |s\rangle$$

Wir drehen den Zustand also erst um die Drehachse  $\vec{w}$  um den infinitesimalen Winkel  $d\Delta$ , dann um  $\vec{s}$  um  $d\Delta$ , dann wieder

um  $\vec{w}$  der Einfachheit halber um den selben Winkel  $d\Delta$  usw. Auch hier muß der zyklische Vorgang nach Messungen unterbrochen werden. Die Drehung eines Polarisationszustandes um die Achse  $\vec{a}$  und den Winkel  $\beta$  auf der Poincaré-Kugel wird durch eine Verzögerungsplatte mit der Verzögerung  $\beta = 2\pi d \delta n / \lambda$  implementiert, deren schnelle

Achse in  $\vec{a}$ -Richtung orientiert ist.  $\delta n$  ist die Doppelbrechung,  $d$  die Dicke der Platte. Unser Ergebnis stellt einen Stapel infinitesimal dünner Verzögerungsplatten dar, deren schnelle Achsen abwechselnd in  $\vec{w}$ - und in  $\vec{s}$ -Richtung orientiert sind. Dieser Plattenstapel ähnelt also sehr dem, den wir für die Implementierung des Grover-Algorithmus vorschlagen.  $\lambda/2$  Glimmerblättchen im Sichtbaren sind 60-80  $\mu$  dick, d.h. ein „infinitesimal“ dünnes Blättchen könnte vielleicht 5  $\mu$  dick sein. Damit wird die Herstellung eines solchen Plattenstapels allerdings zur Herausforderung. Die technische Ausführung des Grover-Algorithmus in der angegebenen Form aus  $\lambda/2$  Glimmerblättchen erscheint dagegen einfacher. Leider ist mit der Implementierung das Problem einer Realisierung der Suchprozesse nicht gelöst, da das Basissystem, in dem gesucht wird, nur 2-dimensional ist. In Referenz [2] wird als hochdimensionales Basissystem im Grover-Algorithmus ein Ortsareal mit vielen Bildpunkten verwendet, doch ist der Rechenprozess dort von unserem etwas verschieden und das Verfahren kann nicht direkt übertragen werden.

**Danksagung** E. Frins thanks the financial support from PEDECIBA (Uruguay) and the Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC, UdelaR, Uruguay). H. Schmitzer is supported by Cottrell Research Corporation.

- [1] M.Nielsen, I.Chuang; Quantum Computation and Quantum Information; Cambridge 2007
- [2] N.Bhattacharya, H.v.Linden v.d.Heuvel, R.Spreeuw; PRL **88** 137901 (2002)
- [3] E.Farhi, S.Gutmann; PRA **57** 2403 (1998)
- [4] J.Simmons, M.Guttmann; States, Waves and Photons; Reading 1970