

Verallgemeinerte Sinusbedingung für ausgedehnte Objekte

Joachim Wesner, Joachim Heil and Hans-Martin Heuck

Leica Microsystems CMS GmbH, Ernst-Leitz-Strasse 17-37, D-35578 Wetzlar, Germany

<mailto:joachim.wesner@leica-microsystems.com>

Die klassische Sinusbedingung garantiert eine comafreie Abbildung nur für einen infinitesimal kleinen Bereich um die optische Achse. Im „off-axis“ Fall muss diese durch eine allgemeinere Form ersetzt werden, die sich u. a. aus der Eikonalthorie der idealen optischen Abbildung[1] ableiten lässt.

1 Einführung

Abbe's Sinusbedingung garantiert (bei korrigiertem Öffnungsfehler) die aberrationsfreie Abbildung eines kleinen Bereichs um die optische Achse eines hochaperturigen Objektivs für **eine vorgegebene** Vergrößerung m .

Die in vielen Optikdesign (OD) Programmen verfügbare Paraxiallinse (PXL), die scheinbar auch für beliebig große Bildfelder eine „ideale“ Abbildung beschreibt, ist unphysikalisch, da sie für **beliebige** Vergrößerungen alle Strahlen aus einem Objekt- in einen Bildpunkt abbildet, während die optische Weglängendifferenz (OPD) sehr große Werte erreicht. Dies liegt daran, dass eine PXL das Fermatsche Prinzip verletzt, welches fordert dass alle realisierten Lichtwege zwischen einem Punktpaar die gleiche optische Weglänge haben.

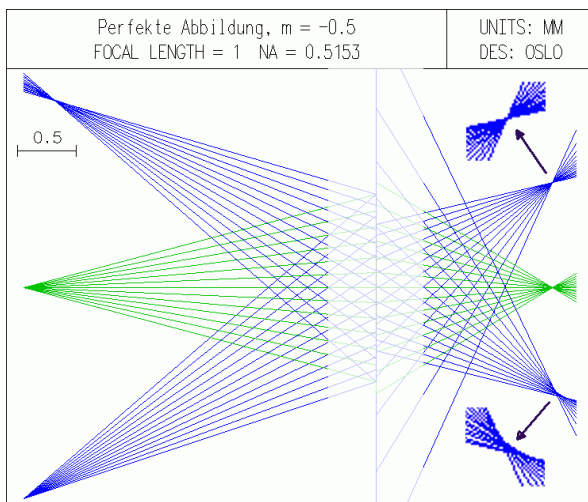


Abb. 1 „Perfekte“ Linse in OSLO für konjugierte und nichtkonjugierte Bildebenen (führt dann rechts unten zu Coma und sphärischem Fehler.). OSLO zeichnet Strahlen nicht nur bis zu den zugehörigen „Hauptkugeln“, sondern bis zu einer gemeinsamen „Hauptebene“. Im realen Fall wäre der Strahlverlauf (hier schematisch angedeutet) im hellen Bereich vom jeweiligen Systemdesign abhängig, es erfolgt kein „Sprung“ des Strahls!

Manche OD-Programme wie **OSLO** verfügen dagegen über „perfekte“ Linsen (Abb. 1) oder andere Elemente, die für beliebig große Aperturen und Felder, teilweise auch für gekrümmte Bildflächen und wählbare Verzeichnungen, das Fermatsche Prinzip strikt befolgen, somit aber auch alle zuge-

hörigen Einschränkungen der optischen Abbildung.

Diese basieren auf der Eikonalthorie der optischen Abbildung [1] und eignen sich so dazu, die prinzipiellen Grenzen der Korrektur optischer Systeme anzugeben [2]. Ebenso können für ein gut korrigiertes (insbes. hochaperturiges) System auch die durch Defokus usw. der restlichen Optik „induzierten“ Aberrationen mit hoher Genauigkeit abgeschätzt werden. Diese Fragestellung tritt u. a. auch bei der Fizeau-Interferometrie auf, wenn der Mess- gegenüber dem Referenzstrahl andere Teile des Systems durchläuft („Retrace“-Fehler).

In der Literatur wurde dies bis jetzt immer ohne Bezugnahme auf die Eikonalthorie behandelt. In [3] wird die Abbildung von nichtkonjugierten Punkten auf die von konjugierten „off-axis“ Punkten zurückgeführt, wobei aber Annahmen, insbesondere über die Bildfeldwölbung, gemacht werden.

2 Punkt- und Punkt-Winkel (PW) Eikonale [1]

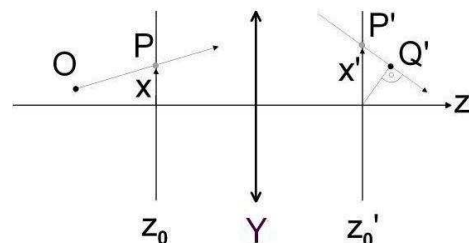


Abb. 2 Punkt-Eikonale S (zwischen P und P') und Punkt-Winkel-Eikonale V (zwischen P und Q') eines allgemeinen optischen Systems Y mit den Bezugebenen z_0 und z_0'

Das Punkt-Eikonale $S(x,y,x',y')$ bezeichnet die minimale optische Weglänge zwischen 2 Punkten P und P' in 2 (nichtkonjugierten) Bezugebenen z_0 und z_0' beim Passieren eines beliebigen optischen Systems Y (Abb. 2). Die fehlenden Winkelparameter (Richtungscosinus) (L, M, L', M') ergeben sich aus dem totalen Differential

$$dS(x, y, x', y') = n'(L dx' + M' dy') - n(L dx + M dy)$$

(also aus der Variation von S in der Umgebung von P und P') zu:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -nL, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -nM, \quad \frac{\partial S}{\partial x'} = n'L', \quad \frac{\partial S}{\partial y'} = n'M'$$

Für konjugierte Ebenen ist das sog. Punkt-Winkel (PW) Eikonale $V(x,y,L',M')$ zwischen P und Q' ge-

eignet. Für die fehlenden Strahlparameter gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -nL, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -nM, \quad \frac{\partial V}{\partial L'} = -n'x', \quad \frac{\partial V}{\partial M'} = -n'y'$$

Um einen Strahl durch ein beliebiges System mit PW-Eikonal V numerisch zu verfolgen [4], müssen L' und M' konsistent zu den bekannten Größen (x, y, z_0) und (L, M) gefunden werden, sodass gilt:

$$L = -\partial V(x, y, L', M') / \partial x, \quad M = -\partial V(x, y, L', M') / \partial y$$

Sind L' und M' gefunden, ergibt sich der Bildort zu:

$$x' = \partial V / \partial L', \quad y' = \partial V / \partial M', \quad z' = z_0'$$

3 Verallgemeinerte Sinusbedingung

Für den Fall der „perfekten“ Linse kann die Beziehung der Strahlwinkel im Objekt und Bildraum u und u' (also 2D) auch aus der lokalen Konstanz der OPD abgeleitet werden (Abb. 3).

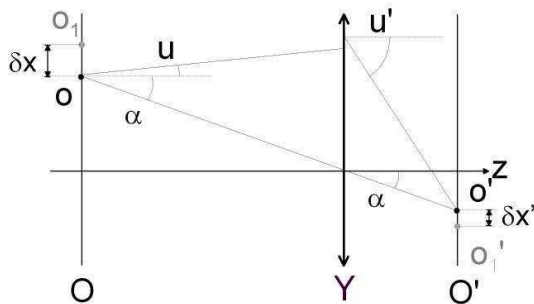


Abb. 3 „Perfekte“ Abbildung zweier benachbarter „off-axis“ Punkte o und o_1 zur Ableitung der VSB (Beziehung zwischen Strahlwinkel in Objekt- und Bildraum u und u')

o sei ein „off-axis“ Punkt, der aberrationsfrei abgebildet wird. Damit dies auch für einen infinitesimal benachbarten Punkt o_1 im Abstand δx erfüllt wird, muss die totale Phasenverschiebung $\delta\varphi_{tot}$ gegen den Mittelpunktstrahl (unter Winkel α), mit Anteilen im Objekt- und Bildraum, Null bleiben:

$$\delta\varphi = -n\delta x(\sin u - \sin \alpha), \quad \delta\varphi' = m n' \delta x(\sin u' - \sin \alpha)$$

$$\delta\varphi_{tot} = \delta\varphi + \delta\varphi' \equiv 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{n(\sin u - \sin \alpha)}{n'(\sin u' - \sin \alpha)}}$$

was auch als **verallgemeinerte Sinusbedingung (VSB)** bezeichnet werden kann.

4 3D-Raytracing mit „Hauptkugeln“ / der VSB

Die VSB ist kompatibel zum Modell der „Hauptkugeln“, allerdings gelten feldabhängig verschieden große Hauptkugeln um die konjugierten **Punkte**, die sich alle auf der Achse in der gemeinsamen Hauptebene berühren. Für nichtkonjugierte Punkte gelten sogar für **jeden Strahl** andere Hauptkugeln.

Die neuen Strahlparameter $[x', y', z'; L', M', N']$ hinter dem System Y können im allgemeinen 3D-Fall somit folgendermaßen bestimmt werden (Abb. 4):

Der einlaufende Strahl (1) wird zur objektseitigen konjugierten Ebene propagiert (2), woraus sich

über den Mittelpunktstrahl (3) der Bildort (4) ergibt. Danach wird der Strahl auch bis zur Oberfläche der Objekt-Hauptkugel verfolgt, womit über den Sprung (6) parallel z hin zur Bild-Hauptkugel der Schnittpunkt (5) und damit auch die neue Strahlrichtung aus der Differenz zu (4) bekannt ist.

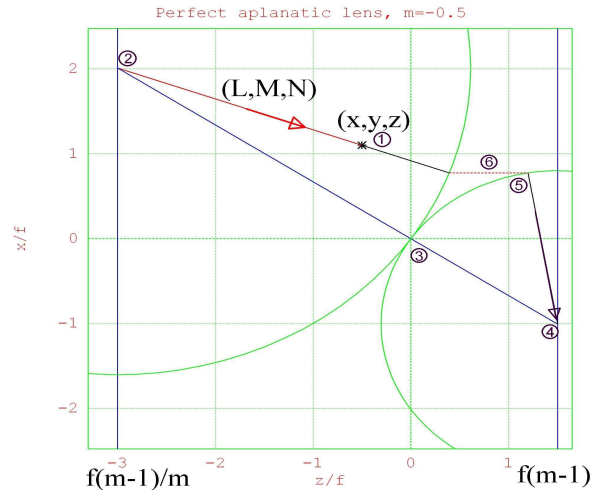


Abb. 4 „Perfektes“ 3D-Raytracing über die konjugierten Ebenen, den Mittelpunktstrahl und den „Sprung“ parallel zur optischen Achse zwischen den Hauptkugeln. Im allgemeinen „windschiefen“ Fall liegen die Punkte (2) und (4) auch in verschiedenen y -Ebenen, die Hauptkugeln berühren sich aber immer bei $(x, y, z) \equiv 0!$

Alternativ findet man als 3D-Variante der VSB mit den Parametern des Eingangsstrahls

$$\vec{r} \equiv (x, y, z), \quad \vec{R} \equiv (L, M, N), \quad |\vec{R}| \equiv 1, \quad N > 0$$

und der Lage der konjugierten Ebenen

$$z_k = f(m-1)/m, \quad z_{k'} = f(m-1), \quad m \neq 0$$

den Schnittpunkt mit der Objektebene

$$\vec{r}_c = \vec{r} + (z_k - x/L)\vec{R}, \quad (L \neq 0, \text{ sonst } M \text{ nutzen!})$$

und daraus Mittelpunktstrahl und Bildort \vec{r}'

$$\vec{R}_c \equiv (L_c, M_c, N_c) = \text{sign}(m)\vec{r}_c/|\vec{r}_c|$$

$$x' = m x_c, \quad y' = m y_c, \quad z' = z_{k'}, \quad \vec{r}' \equiv (x', y', z')$$

Für die neue Strahlrichtung \vec{R}' gilt dann

$$L' = (L - L_c)/m + L_c, \quad M' = (M - M_c)/m + M_c$$

Literatur

- [1] A. Walther: *The Ray and Wave Theory of Lenses*, (Cambridge University Press, 1995)
- [2] A. Walther: „Irreducible aberrations of a lens used for a range of magnifications“, *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 415-422 (1989)
- [3] N. Choi, M. Kim, und J. Kim: „Approach to investigating the spherical aberration variation with the object position in an aplanatic system“, *Appl. Opt.* **48**, 242-249 (2009) und Quellen dort, insbes. Ref. 4.
- [4] A. Walther: „Mock ray tracing“, *J. Opt. Soc. Am.* **60**, 918-920 (1970)