

Aspekte der Lichtausbreitung zwischen verkippten Ebenen

Karl-Heinz Brenner *

*Lehrstuhl für Optoelektronik, Universität Heidelberg

<mailto:brenner@ziti.uni-heidelberg.de>

Neben der klassischen Behandlung der Lichtausbreitung existieren für Spezialfälle auch Verfahren zur Behandlung der Lichtausbreitung zwischen gekippten Ebenen. Der Beitrag erweitert diese Methoden auf beliebig orientierte und positionierte Koordinatensysteme. Anwendungen ergeben sich in der Toleranzanalyse und in Systemen mit schräg im Strahlengang platzierten Flächen.

1 Einführung

Für die numerische Behandlung der skalaren Lichtausbreitung stehen eine Reihe von Verfahren zur Verfügung. Am bekanntesten und auch am weitesten verwendet ist die Fresnel'sche Näherung, welche als eine Methode im Frequenzraum einzuordnen ist. Das Verfahren ist auf das paraxiale Regime begrenzt ist und stellt eine Näherung der nichtparaxialen Methode des Angular Spectrum (AS) dar [1].

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{u}_0(\mathbf{k}_\perp) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^2k_\perp \quad (1)$$

Da die Näherung in Bezug auf Rechenaufwand keinen Vorteil bringt, spricht kaum ein Grund für die Verwendung der Fresnel'schen Näherung im Frequenzraum. Daneben wird auch das Kirchhoff'sche Beugungsintegral verwendet, welches als Faltung im Ortsraum einen wesentlich höheren Rechenaufwand erfordert. Außerdem erfordert es die Kenntnis sowohl der Verteilung als auch des Gradienten bei $z=0$. Eine praktischere Methode im Ortsraum stellt daher die Sommerfeld-Methode 1 dar. Es kann gezeigt werden, dass Sommerfeld 1 und AS mathematisch äquivalent sind [1]. In der numerischen Behandlung zeigt sich jedoch, dass AS auf das Nahfeld und Sommerfeld 1 auf das Fernfeld beschränkt sind. Die kritische Distanz ist hierbei

$$z_{krit} = D \sqrt{\left(\frac{D}{N\lambda_m}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (2)$$

Somit ergänzen sich die beiden Methoden in dem Sinn, dass für $z < z_{krit}$ die AS-Methode und für $z > z_{krit}$ die Sommerfeldmethode numerisch besser geeignet ist. Für das Fernfeld ist die Fresnel'sche Näherung durchaus geeignet, da die Methode durch Abspaltung des quadratischen Phasenterms als Fouriertransformation behandelbar ist. Allen Methoden ist jedoch gemeinsam, dass die Lichtausbreitung stets zwischen planparallelen Ebenen erfolgt.

2 Ausbreitung zwischen verkippten Ebenen

Optiksimulationen spielen heute eine große Rolle im Entwurf optischer Systeme. Daher bietet eine Erweiterung der Theorie auf verkippte Ebenen eine große Zahl von Anwendungsfeldern. Bei der Toleranzanalyse ist es oft von Interesse, wie stark Linsen oder Detektorebenen verkippt werden können, bevor eine Beeinträchtigung sichtbar wird. Neben diesen unabsichtlichen Verkippungen gibt es auch absichtlichen Verkippungen, wie z.B. in der Scheimpfluggeometrie oder bei 45°-Spiegeln und Strahlteilern. Die Entwicklung dieser Theorie basiert auf einer Reihe von Publikationen [2-6] in denen jeweils unterschiedliche Spezialfälle behandelt wurden.

3 Theorie für beliebig orientierte Systeme

Um die Ausbreitung zwischen beliebig orientierten Systemen zu beschreiben, betrachten wir ein globales Koordinatensystem, ein Quellkoordinatensystem mit den orthonormalen Einheitsvektoren $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sowie ein Zielkoordinatensystem mit den orthonormalen Einheitsvektoren $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$. Die Darstellung eines beliebigen Punkts kann durch unitäre Transformationen in jedes der Koordinatensysteme transformiert werden. So lautet die Transformation des Punkts mit den Koordinaten (X, Y, Z) vom Ziel- in das Quellsystem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Xx} & \mathbf{Yx} & \mathbf{Zx} \\ \mathbf{Xy} & \mathbf{Yy} & \mathbf{Zy} \\ \mathbf{Xz} & \mathbf{Yz} & \mathbf{Zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mathbf{O}-\mathbf{o})\mathbf{x} \\ (\mathbf{O}-\mathbf{o})\mathbf{y} \\ (\mathbf{O}-\mathbf{o})\mathbf{z} \end{pmatrix} \quad (3)$$

wobei \mathbf{o} und \mathbf{O} den Ursprung des Quell- bzw. Zielkoordinatensystems darstellen. In ähnlicher Weise transformieren sich Richtungsvektoren. Bezeichnen wir die Matrix in (3) mit \mathbf{t} so kann ein Vektor \mathbf{k} im Quellkoordinatensystem gemäß

$$\mathbf{K} = \mathbf{t}^{-1} \mathbf{k} = \mathbf{T} \mathbf{k} \quad (4)$$

ins Zielsystem transformiert werden. Wenden wir diese Transformationen auf die AS in Gl. 1 an,

$$u(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint V(\mathbf{K}_\perp) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} d^2 K_\perp \quad (5)$$

so erhalten wir wieder eine Beschreibung ähnlich der AS im Quellraum. Diese kann mittels der FFT ebenso effizient implementiert werden. Die zu transformierende Funktion

$$V(\mathbf{K}_\perp) = \tilde{u}_0 \left((\mathbf{t} \cdot \mathbf{K})_\perp \right) e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{T}\Delta O_r} \left| \mathbf{J}_{k,K} \right| \quad (6)$$

entspricht dem Produkt des transformierten Quellspektrums mit einem Propagationsfaktor und der Jakobi-Determinante der Transformation zwischen den k-Räumen. ΔO_r entspricht dem rechten Term in Gl. 3. und die Inverse \mathbf{T} ist wegen der Unitarität gleichzeitig die Transponierte von \mathbf{t} . Da die Transformation bekannt ist, kann die Determinante analytisch angegeben werden:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{J}_{k,K} \right| &= t_{0,0}t_{1,1} - t_{1,0}t_{0,1} \\ &+ \frac{K_x}{K_z} (t_{0,1}t_{1,2} - t_{1,1}t_{0,2}) \\ &+ \frac{K_y}{K_z} (t_{1,0}t_{0,2} - t_{0,0}t_{1,2}) \end{aligned} \quad (7)$$

Besondere Beachtung erfordert das transformierte Quellspektrum, da hier auf k-Werte zugegriffen wird, die nicht auf dem ursprünglichen Abtastraster liegen. Hierfür wurde eine optimierte kubische Interpolation entwickelt, welche den Feldzugriff signifikant beschleunigt. Außerdem ist bei dieser Operation zu überprüfen, ob die Breite des transformierten Quellspektrums noch innerhalb des Rechengebiets zu liegen kommt.

4 Erweiterungen

Durch die Behandlung im Frequenzraum ist unter Berücksichtigung der Orthogonalität zwischen dem E-Feld-Vektor und dem k-Vektor eine Erweiterung auf vektorielle Felder problemlos möglich. Durch die Aufhebung der Beschränkung auf planparallele Flächen wird es möglich, auch nichtsequentielle optische Systeme wellenoptisch zu analysieren. Ferner kann die für die Ausbreitung in inhomogenen Medien verwendete BPM oder die WPM auch auf gekrümmte Geometrien erweitert werden. Dies ermöglicht z.B. die Analyse von Wellenleitern mit einer 90°-Krümmung.

5 Beispiele

Im ersten Beispiel wurde eine Rechteckapertur als Quellverteilung verwendet. Abb. 1 zeigt auf der linken Seite das Spektrum der Quellverteilung und auf der rechten Seite das Spektrum bei einer Skalierung, die einer Verkippung der nachfolgenden Ebene um 45° um die y-Achse entspricht. Wie

zu sehen ist, liegt das transformierten Spektrum hier gerade noch im Rechengebiet.

Abb. 2 zeigt das Simulationsergebnis für den Fall einer binären Eingangverteilung (Buchstabe F) bei Ausbreitung auf eine um 45° gekippte Ebene. Der rechte Bereich rückt dabei näher an die Quellebene heran und ist daher weniger defokussiert. Der linke Bereich ist hingegen wegen der größeren Distanz stärker defokussiert.

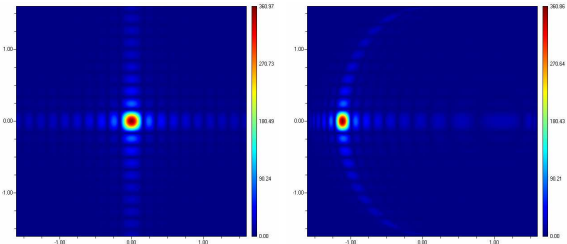


Abb. 1 Spektrum einer Rechteckapertur (links) und gemäß Gl. 4 transformiertes Spektrum für eine 45°-Verkippung.

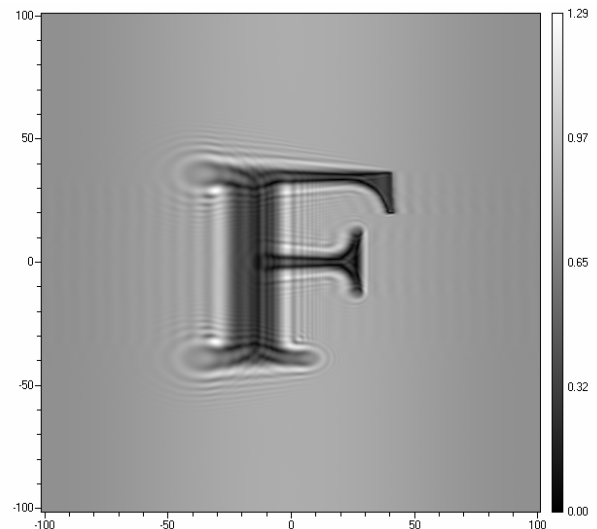


Abb. 2 Intensitätsverteilung des Buchstaben F nach Ausbreitung auf eine um 45° verkippete Ebene.

Literatur

- [1] J. J. Stamnes, "Waves in focal regions", Taylor & Francis, New York (1986).
- [2] S. Ganci, Eur. J. Phys. 2, 158–160 (1981).
- [3] D. Leseberg, C. Frere, Appl. Opt. 27, 3020–3024 (1988).
- [4] N. Delen and B. Hooker, J. Opt. Soc. Am. A 15, 857 (1998).
- [5] K. Matsushima, H. Schimmel, F. Wyrowski, J. Opt. Soc. Am. A 20, 1755 (2003).
- [6] M. Janda, I. Hanak, L. Onural, J. Opt. Soc. Am. A 25, 3083 (2008)