

Paraxialen Lichtverteilung im Fokusbereich der Linse: ein Vergleich von mehreren analytischen Lösungen

Yang Wu, Damien P. Kelly

Institut für Mikro- und Nanotechnologien, Macro-Nano, Fachgebiet Optik Design, TU Ilmenau

mailto:yang.wu@tu-ilmenau.de

Ein klassisches Problem in der Beugungstheorie ist die Beschreibung der komplexen Feldverteilung in der Nähe des Brennpunktes. Zur Berechnung dieser Verteilungen werden 3 analytische Lösungen diskutiert. Das Hauptaugenmerk der Untersuchung liegt in der Konvergenzgeschwindigkeit der Lösungen.

1 Einführung

Um die Abbildungseigenschaften eines optischen Systems auch theoretisch verstehen zu können, ist unter anderem von Interesse die komplexe Feldverteilung in der Brennebene einer Linse zu kennen. Unter Verwendung der paraxialen Approximation können analytische Lösungen für dieses Beugungsproblem gefunden werden, für den Fall, dass eine ebene Welle auf eine bikonvexe Linse trifft. Die laterale Ausdehnung der Linse ist durch eine Blende begrenzt. Ausgangspunkt für die Berechnungen ist das Fresnel'sche Beugungsintegral. Zur Lösung des Integrals und zur analytischen Lösung werden hier drei verschiedene Methoden verwendet. Zwei der diskutierten Methoden nutzen die Lommel-Funktion. Eine alternative Variante basiert auf der Verwendung von Zernike Polynomen.

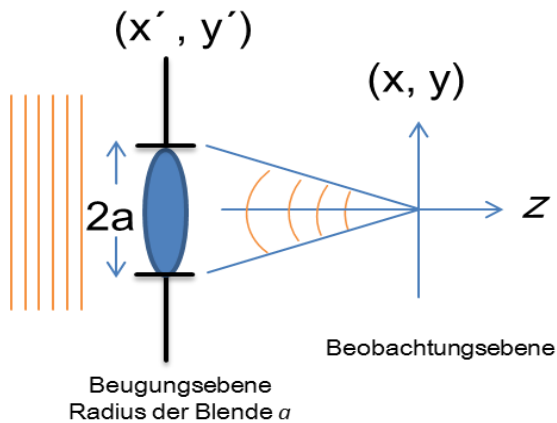


Abb.1. Schematische Darstellung der Beugungsgeometrie

2 Mathematische Beschreibung des gebeugten Feldes

Trifft eine ebene Welle auf eine ideale bikonvexe Linse (Abb. 1), d.h. ohne Abbildungsfehler, kann

zur Beschreibung des gebeugten Feldes das Fresnel'sche Beugungsintegral verwendet werden,

$$T(x, y, z) = -\frac{ike^{ikz}}{2\pi z} \iint e^{-\frac{ik(x'^2+y'^2)}{2f}} e^{\frac{ik}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]} dx' dy' \quad (1)$$

Wobei f die Brennweite der Linse und k die Wellenzahl beschreibt. Für rotationssymmetrische Funktionen, wie die Linsenfunktion in Gl.(1), lässt sich das Beugungsintegral (1) vereinfacht darstellen, dazu werden die kartesischen Koordinaten in ein Polarkoordinatensystem transformiert. Nach Born und Wolf [1] gilt dann für das gebeugte Feld hinter der Linse:

$$T(u, v) = -\frac{ika^2}{z} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} \rho J_0(v\rho) d\rho \quad (2)$$

Die Koordinaten $v = \frac{ka}{f} r$, und $u = k\left(\frac{a^2}{f^2}\right)(z-f)$

werden auch als optische Koordinaten bezeichnet. Das Integral (2) wird in Real- und Imaginärteil zerlegt

$$2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} \rho J_0(v\rho) d\rho = C(u, v) - iS(u, v) \quad (3)$$

um diese getrennt mit Hilfe der Lommel-Funktion zu berechnen (siehe S. 438 im [1]).

Es ergeben sich zwei Möglichkeiten zur Berechnung – die Anwendung der ersten $U_1(u, v)$, $U_2(u, v)$ bzw. der zweiten Lommel-Funktion $V_0(u, v)$, $V_1(u, v)$. Eine alternative analytische Lösung für das beschriebene Beugungsproblem basiert auf Zernike Polynomen und wurde von Nijboer entwickelt [2].

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} \rho J_0(v\rho) d\rho = \\
& = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-i)^n e^{-\frac{1}{4}ui} \sqrt{\frac{2\pi}{-u}} J_{n+\frac{1}{2}}(-u/4) \frac{J_{2n+1}(v)}{v}
\end{aligned} \tag{4}$$

3 Simulation

Das Beugungsintegral analytisch zu lösen ist mit den drei vorgestellten Methoden möglich unter der Verwendung verschiedener, unendlicher Reihen von Bessel-Funktionen. Obwohl alle Methoden mathematisch äquivalent und konvergent sind, liefern diese in der numerischen Darstellung verschiedene Lösungen. Bei der Berechnung der Integrale werden die unendlichen Reihen nach einer endlichen Anzahl Glieder abgebrochen. Der Konvergenzbereich und die Konvergenzgeschwindigkeit spielen eine entscheidende Rolle bei der Festlegung des Abbruchglieds. Je schneller eine Reihe konvergiert, desto weniger Glieder werden benötigt und damit verkürzt sich die Rechenzeit. Beim Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeiten für die drei Methoden werden erhebliche Unterschiede festgestellt.

Die Variante, die die erste Lommel-Funktion verwendet, konvergiert schnell im Schattenbereich für $u < v$, aber im Beleuchtungsbereich für $u > v$ wird eine höhere Anzahl Reihenterme benötigt. Die umgekehrte Situation herrscht bei der Nutzung der zweiten Lommel-Funktion. Es wird deshalb als sinnvoll erachtet eine Kombination beider Lommel-Funktionen zu nutzen:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}iu\rho^2} \rho J_0(v\rho) d\rho = \\
& = \begin{cases} \frac{2\sqrt{U_1^2(u,v) + U_2^2(u,v)}}{u}, u < v \\ 2\left(\frac{-i}{u} e^{\frac{iv^2}{2}} - \frac{V_1(u,v) - V_0(u,v)}{u} e^{-\frac{ui}{2}}\right), u > v \end{cases} \tag{5}
\end{aligned}$$

Mit Gl. (5) werden 10 Reihenglieder benötigt für die Berechnung des Integrals im Bereich $-6\pi < u < 6\pi$, $-6\pi < v < 6\pi$.

Bei der Verwendung der Methoden mit Zernicke Polynomen nach Nijboer ist eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit in der Nähe des Brennpunktes für $u=0, v=0$ zu finden. Im Schatten- und Beleuchtungsbereich wird mit 5 Reihengliedern eine hinreichende Genauigkeit erreicht. Liegt der Beobachtungspunkt außerhalb des Brennpunktes

mit $u \gg 0, v \gg 0$ konvergiert die Lösung deutlich langsamer und in diesem Fall ist es besser die Lommel-Funktion zu nutzen. Abb. 2 und 3 zeigen die Simulationen für die drei behandelten Methoden.

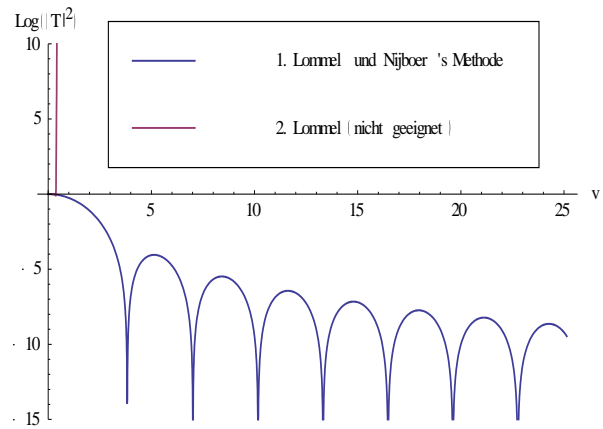


Abb. 2. Beugungsfeld an der Brennebene ($u=0$) 10 Termen werden in der Rechnung genommen

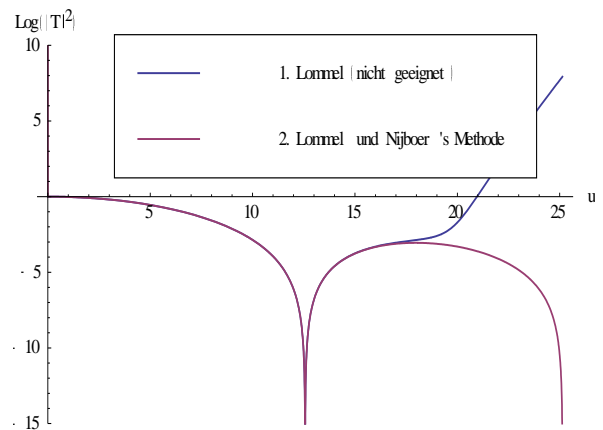


Abb. 3. Beugungsfeld an der optische Achse ($v=0$) 10 Termen werden in der Rechnung genommen

4 Zusammenfassung und Ausblick

Die Simulationsergebnisse zeigen, dass die Methode nach Nijboer eine höhere praktische Relevanz besitzt als die anderen beiden Methoden. Desweiteren ist diese Methode auch für aberrationsbehaftete optische Systeme anwendbar. Im nächsten Schritt werden Methoden untersucht, die ermöglichen das gebeugte Feld einer nicht idealen Linse zu beschreiben.

Literatur

- [1]. M. Born and E. Wolf. Principles of Optics, Pergamon Press, 6 edition, 1980,
- [2]. B. R. A. Nijboer. "The Diffraction Theory Of Optical Aberration" in: Physica XIII 10 (1947)