

Mathematische Modellierung der Strahlungsspektren einer LED

S. Stephan, R. Lachmayer,

Institut für Produktentwicklung und Gerätebau, Leibniz Universität Hannover, 30167 Hannover.

<mailto:stephan@ipeg.uni-hannover.de>

Im Rahmen der wissenschaftlichen Arbeit am Institut wurde der Ansatz der Strahlungsmodellierung der LEDs durch Verteilungsfunktionen aus der Statistik verfolgt. Die Strahlungsmodelle verbessern die Simulation des Betriebsverhaltens von LED-Systemen und bieten Alternativen bei der Stromregelung an.

1 Einführung

Die Elektrolumineszenz ist das Ergebnis der quantenmechanischen Vorgänge in der Sperrschicht der Halbleiter. Das Halbleitermaterial, seine Dotierung und Gitterfehler sowie der geometrische Aufbau der Halbleiterschichten beeinflussen das Spektrum der emittierten Strahlung [1].

2 Ansätze der Modellierung

Die durch Quantensprünge entstehende Photonenemission ist stochastischer Natur und kann daher mit den Mitteln der Stochastik und Statistik beschrieben werden.

Das gemessene Spektrum einer LED wird bei diesem Ansatz als eine Dichtefunktion einer Verteilung aus N Elementen (Quanten oder Quantenäquivalente) angenommen. Dabei wird die Energie der Quanten bzw. deren Wellenlänge zu M Klassen definiert. Für weitere Betrachtung wird zunächst angenommen, dass in einem Zeitintervall dt immer die gleiche Anzahl der Quanten emittiert wird und die Halbleitereigenschaften und Betriebsbedingungen gleich bleiben.

Die Anzahl der Quanten kann bei ausreichend großem dt hohe Werte annehmen. Als Quantenäquivalent wird das Verhältnis zwischen der Leistung einer Klasse, ausgedrückt durch die diskrete Wellenlänge λ , und der gesamten Strahlungsleistung angenommen. Damit ist es zulässig die Spektralverteilung mit einer verschobene Normalverteilung (Formel 2.1) bzw. Weibullverteilung (Formel 2.2) zu betrachten.

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.1)$$

$$f_W(\lambda) = \frac{k}{t_v} \left(\frac{\lambda}{t_v}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{\lambda}{t_v}\right)^k} \quad (2.2)$$

Sinngemäß werden der Erwartungswert μ und Standardabweichung σ der Normalverteilung in Nanometer angegeben. Bei der Weibullverteilung wird nur der Skalenparameter t_v in Nanometer angegeben, während Streufaktor k einheitslos ist.

In der Abbildung 1 ist erkennbar, dass die Spektrumkurve eine Asymmetrie aufweist. Daher ist es zu erwarten, dass bei einer Annäherung der Kurve durch eine Normalverteilung immer ein relativ hoher Fehler der Modellierung bleibt.

Bei der Weibullverteilung hängt die Form der Dichtefunktion von dem Streuparameter k ab. Ab einem $k > 2$ besitzt die Kurve einen ähnlich Verlauf wie die Spektrumkurve mit einer leichten Asymmetrie. Durch diese Eigenschaft ist es zu erwarten, dass die Weibullverteilung besser an die Spektralverteilung einer LED angepasst werden kann. Aus diesem Grund wird für die Modellierung der Spektren die Weibullverteilung favorisiert.

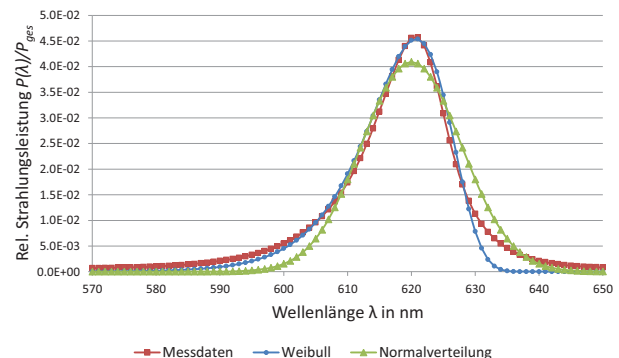


Abbildung 1: Spektrum einer LED (rot) im Vergleich zu Weibull- (blau) und Normalverteilung (grün)

3 Entwicklung der Modelle

Zum Ermitteln der Weibullparameter k und t_v gibt es aus der Statistik eine Reihe von Methoden. Bei der aktuellen Arbeit wurden die Parameter der Verteilung durch Versuch bzw. iterativ gesucht. Diese Methode erwies sich als schnell und effektiv. Für die Anfangswerte der Iteration ist es ausreichend, wenn $k > 2$ und t_v in der Nähe der Peakwellenlänge liegen.

Für gute Iterationsergebnisse ist es notwendig, dass die Form der modellierten Verteilung mit den Messwerten gut übereinstimmt. Um die Abweichung zu charakterisieren, wurde die Summe der Fehlerquadrate verwendet.

Als ein weiteres Kriterium für die Iteration wurde Lichtstrom als photometrische Größe verwendet. Die Untersuchungen zeigen, dass die Faltung der Spektralverteilung mit der V-Lambda-Kurve eine Formveränderung hervorruft und das Optimum der Weibullparameter an einer anderen Stelle liegt.

Zum Beispiel ist $k = 73,4$ und $t_v = 620,8$ nm ein Optimum für den kleinsten Formfehler = 0,0154. Dabei beträgt der Lichtstromfehler 4,29 Lumen (entspricht ca. 10,2 % bezogen auf den Messwert).

Dagegen liegen k und t_v für den kleinsten Lichtstromfehler mit 0,0009 Lumen bei 127,6 und 622 nm. In diesem Fall ist der Formfehler 0,0378 und um fast 2,5-fach größer als für das Formfehler-Optimum. Die Modellierungsergebnisse für beide Optima sind in der Abbildung 2 dargestellt.

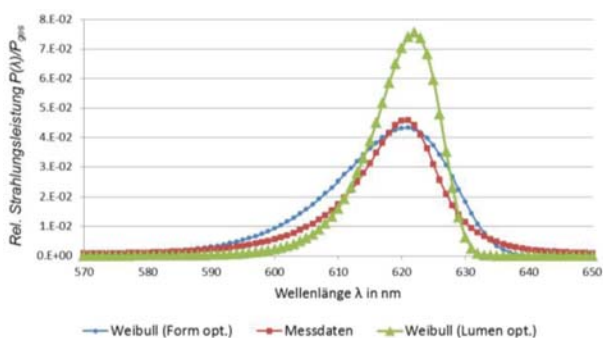


Abbildung 2: Messspektrum (rot) im Vergleich zu dem Modell mit bester Formanpassung (blau) und bester Lichtstromanpassung (grün)

Weitere Untersuchungen zeigten, dass die modellierte Strahlungsverteilung durch einen Skalierungsfaktor und eine zusätzliche Verteilung für schwache Strahlung deutlich verbessert werden kann. Für die Hauptstrahlungsverteilung wird der Index h und für schwache Strahlung Index s verwendet. Formel 3.3 beschreibt die modellierte Gesamtverteilung

$$f_{ges}(\lambda) = a_h f_h(\lambda) + a_s f_s(\lambda) \quad (3.3)$$

Die Faktoren a_h und a_s der Verteilungen müssen in der Summe eine Eins ergeben. Damit beträgt der Fehler der gesamten Leistung bei der Modellierung Null und für die Modellierung werden nicht sechs sondern nur fünf Parameter benötigt.

$$1 = a_h + a_s \quad (3.4)$$

Mit Hilfe eines Versuches wurden die optimalen Parameter des Modells für die früher gezeigten Messdaten ermittelt. Diese lauten:

$$k_h = 100, t_{vh} = 621 \text{ nm}; a_h = 0,73$$

$$k_s = 5,7 t_{vs} = 618 \text{ nm}, a_s = 0,27$$

Der Formfehler liegt bei 0,00573 (entspricht ca. 12 % bezogen auf den Leistungswert bei Peakwellenlänge) und der Lichtstromfehler bei 0,04 Lumen (entspricht ca. 10,2 % bezogen auf den Messwert). Abbildung 3 zeigt das Ergebnis der Modellierung.

Bei der neuen Form der Modellierung entsteht der Formfehler im Wesentlichen durch einen starken Knick auf der rechten Seite. Dieser Knick ist durch hohe k -Werte der Weibullverteilung bedingt und lässt sich nicht vermeiden. Um diesen Knick zu kompensieren ist eine zusätzliche Verteilung notwendig. Dies würde aber die Komplexität des Modells deutlich erhöhen und ist nicht anstrebenswert.

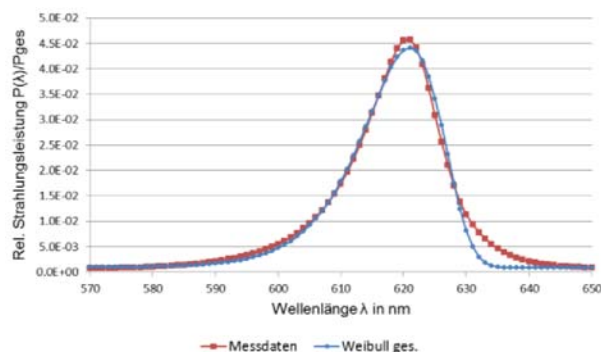


Abbildung 3: Vergleich der Messwerte eines Spektrums einer LED und der modellierten Spektralverteilung mit zwei gewichteten Weibullverteilungen.

4 Zusammenfassung

Eine mathematische Modellierung der Strahlungsspektren einer LED ist mit dem dargestellten Ansatz möglich. Die Ergebnisse der Modellierung sind allerdings stark von den Suchkriterien für das Optimum abhängig. Ähnliches Vorgehen sollte mit der Normalverteilung überprüft werden. Die vermeintlichen Vorteile der Weibullverteilung erwiesen sich bei hohen k -Werten als ein Nachteil. Im Weiteren sollen zusätzlich Verbindungen zwischen den Modellierungsparametern und den physikalischen Größen wie elektrischen Strom, Temperatur, Peakwellenlänge, etc. hergestellt werden. Damit ließen sich Spektralverteilungen in jedem Arbeitspunkt einer LED modellieren. Für die Parameterschätzung kann der Genetische Algorithmus [2] verwendet werden. Dieser ist besonders für mehrdimensionale Zielfunktion-Optimierung geeignet.

Literatur

- [1] Tae-Yeon Seong, Jung Han, Hiroshi Amano, Hadis Morkoc: III-Nitride Based Light Emitting Diodes and Applications, Springer Netherlands 2013, ISBN: 978-94-007-5862-9
- [2] R. Lachmayer, I. Mozgova, S. Stephan, K. Kuznetsov, O. Biloborod'ko (2011): Parameter Estimation of Mixture Distributions using Evolutionary Modeling for Evaluation of Optomechatronic Systems, IWK 56, TU Ilmenau, 2011