

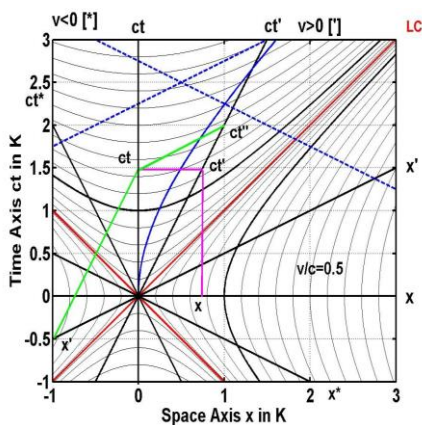
Ein Scherenmechanismus zur Veranschaulichung des Minkowski-Diagramms der Speziellen Relativitätstheorie

W.Dultz*, E.Frins**, B.Hils*, H.Schmitzer

Univ. Frankfurt(Main)*, Universidad de la República Uruguay**, Xavier Univ. Cincinnati

requalivahanus(affenschaukel)t-online.de

Angeregt durch die ART-Vorlesung von Ester Cabezas-Rivas [1] haben wir einen Scherenmechanismus entwickelt, der das Diagramm des Minkowskiraums in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit v zweier Inertialsysteme veranschaulicht. Zeitdilatation, Lorentzkontraktion und ihre Umkehrung, unterschiedliche Gleichzeitigkeit in verschiedenen Inertialsystemen, der Dopplereffekt u.a. können an einem beweglichen Nomogramm für verschiedene Relativgeschwindigkeiten abgelesen werden.



Die Lorentztransformationen (1) lassen sich in einem homogenen und isotropen Raum aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in den Inertialsystemen K, K' ableiten [2]. Abweichend

Abb.1 Minkowski-Diagramm für die Bestimmung der Relativgeschwindigkeit v . Gleichzeitigkeit in K', K^* auf den gestrichelten blauen Geraden [1].

sollte man aber die Lösung dann durch Koeffizientenvergleich und die Vorzeichen durch die Richtung der Relativgeschwindigkeit v suchen, anstelle gleich Hyperbelfunktionen einzuführen. Es folgt das Diagramm des 2d-Minkowski-Raumes Abb.1.

$$x = \gamma(x' + v/c ct'); x' = \gamma(x - v/c ct)$$

$$ct = \gamma(ct' + v/c x'); ct' = \gamma(ct - v/c x)$$

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (1)$$

Die schwarzen Hyperbeln sind die Kurven gleichen Ereignisabstandes s zum Ursprung O , die Koordinatenachsen des bewegten Systems K' liegen symmetrisch zu den roten Diagonalen des Lichtkegels. Die blaue Kurve beschreibt die Bahnkurve eines Teilchens mit gleichmäßiger Beschleunigung (Hyperbelbewegung); ein freies Teilchen läuft entlang der Achse ct' . Die richtige Lage der Achsen für verschiedene v wird durch unsere Mechanik aus Märklinteilen gewährleistet Abb.2, bei der

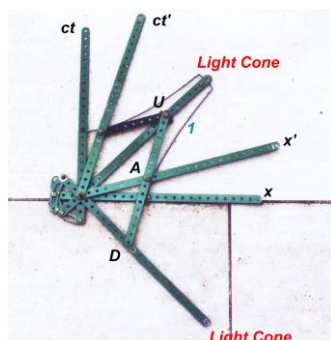


Abb.2 Märklinmodell des 2d-Minkowski-Raumes

der Schlitten U auf dem Strahl LC des Lichtkegels gleitet und die Achsen ct' und x' des bewegten Systems im gleichen Winkelabstand hält. Auf dem Hintergrund des Diagramms, Abb.1, erlaubt die Mechanik die Einstellungen der Achsen - mit gleichmäßig linearen Maßstäben - für alle Relativgeschwindigkeiten v in einem Quadranten; die Drähte stellen die Einheitshyperbeln $ss^*=1$ dar. Die Schlittenmechanik könnte u.a. auch durch ein Kegeldifferential mit festem Differentialkorb und einem Antrieb über das daran befestigte Kegelrad am Achsendrehpunkt erfolgen Abb.3, wobei die Zeiger den Achsen ct', x' entsprechen. Lego ist allerdings zum diesem Musterbau nicht besonders geeignet. In Abb.1 wird die Relativgeschwindigkeit v bestimmt: An den Standpunkten O und x in K befinden sich zwei Beobachter mit synchronisierten Uhren und vermessen das Objekt ct' auf der Zeitachse ct' in K' . Sie finden die Koordina-



Abb.3 Legomodell einer Minkowski-Mechanik

ten $(0,0)$ und $(ct,x) \Rightarrow v/c=x/ct$ (rosa Linien). Das selbe gilt bei Messung des Objektes ct von K' aus (grüne Linien) $\Rightarrow v/c=-x'/ct'$. Außerdem zeigt Abb.1 zwei Linien (blau gestrichelt), auf denen alle Ereignisse in K', K^* gleichzeitig sind, nicht aber für Beobachter im System K . Abb.4 zeigt die Längenkontraktion im bewegten Bezugssystem K' (Linien). In K' befindet sich ein Stab (dick schwarz) der Länge OL' , dessen Anfang und Ende an vielen Orten auf x in K mit synchronen Uhren beobachtet wird [3].

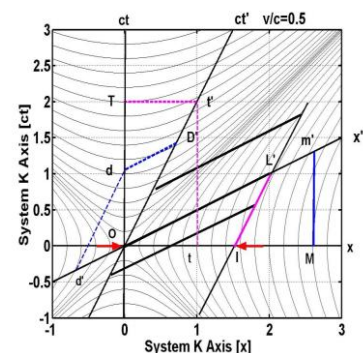


Abb.4 Längenkontraktion und Zeitdilatation (gestrichelt) [1].

Alle vergleichen nach dem Vorbeiflug ihre Daten. Der Beobachter am Ursprung O und der bei I haben Ende und Anfang des Stabes zur gleichen Zeit gemessen (schräge rosa Linie parallel ct'). der Stab hat die Länge $l=L\sqrt{1-(v/c)^2}$ in K: er erscheint im System K verkürzt und paßt daher durch den Spalt (rote Pfeile). Das kommt daher, daß er im System K erst seine Spitze und später sein Ende „durchgefädelt“ hat. Umgekehrt erscheint der Stab OM in K von K' aus (m') verkürzt (blaue Linie parallel ct). Außerdem zeigt Abb. 4 das Phänomen der Zeitdilatation (gestrichelt). Im System K befinden sich Beobachter mit synchronen Uhren bei O und t und beobachten die bewegte Uhr auf ct'. Sie finden den Zeitabstand $T=\gamma t' > t'$ (rosa Linie gestrichelt). Blau gestrichelt ist der umgekehrte Effekt.

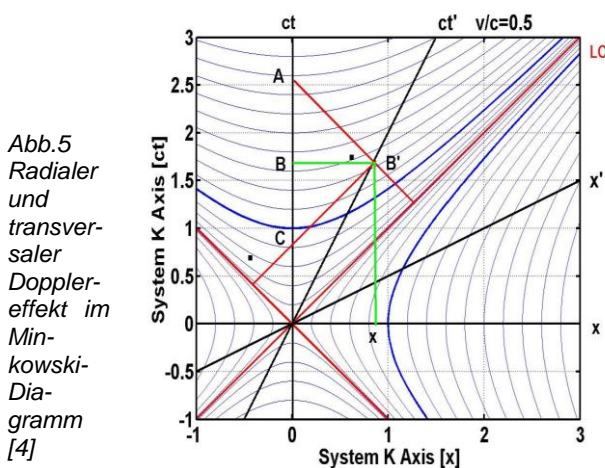


Abb.5 Radialer und transversaler Dopplereffekt im Minkowski-Diagramm [4]

In Abb. 5 wird der radiale (oder longitudinale) Dopplereffekt anschaulich gemacht. Eine Lichtquelle auf ct' blinkt zur Zeit O und zur Zeit B'. Die Lichtsignale von B' treffen zur Zeit A (die Quelle flieht: $v > 0$) bzw. C (sie kommt entgegen: $v < 0$) bei den Beobachtern in K ein. Die Rechnung (2) zeigt, daß der, in Abb.5 ab B' eingezeichnete rote Lichtkegel die ct Achse bei A und C schneidet. $C < A$ ist die kurze

$$ct_{(A,C)} = ct_B \pm x; ct_B = \gamma ct'_{(B)}; x/ct_B = v_r/c;$$

$$ct_{(A,C)} = \gamma ct'_{(B)} \pm v_r/c \cdot ct_B; ct_B = \gamma ct'_{(B)};$$

$$ct_{(A,C)} = \gamma ct'_{(B)} \pm \gamma v_r/c \cdot ct'_{(B)} = \gamma ct'_{(B)} (1 \pm v_r/c);$$

$$dct_{(A,C)}/dct'_{(B)} = \lambda/\lambda' = \gamma (1 \pm v_r/c);$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}; (2)$$

Zeit und beschreibt die kleinere Wellenlänge der aufeinander zufliegenden Inertialsysteme, A entsprechend die größere Wellenlänge der vor einander fliehenden Systeme. v_r ist die Radialgeschwindigkeit der Systeme, v ihre Relativgeschwindigkeit (2). Für $v_r=0$ erhält man den transversalen Dopplereffekt infolge der Lorentzkontraktion der Wellenlänge λ .

Besonders interessant ist eine Idee von de Vries, die Bewegung einer Materiewelle im Minkowski-Diagramm darzustellen [5]. Hierzu setzt man in den Eikonalansatz der Wellenfunktion ψ mit der Wirkung S

die Lagrangefunktion $L = pv - H$ ein (3), einem Zusammenhang, der auch in der SR gilt.

$$\psi = \exp(i/\hbar S) = \exp(i/\hbar Ldt) \text{ mit } L = pv - H;$$

$$\psi = \exp(i/\hbar (pdx - Hdt)) \text{ mit } p = \gamma mv; H = \gamma mc^2;$$

$$\text{und } dx/cdt = v/c; \psi = \exp(i/\hbar (\gamma mvd x - \gamma mc^2 dt));$$

$$\psi = \exp(-i/\hbar \gamma mc (cdt - v/c dx)) = \exp(-i/\hbar m c c d t');$$

$$\text{mit der Lorentztransformation, ist die Wirkung (3)}$$

Man findet, daß die Wirkung Ldt proportional der Eigenzeit dt' des Teilchens ist, auch Ref. [2a]. Die Lagrangefunktion charakterisiert sich damit als die, von einem (äußeren) Beobachter von K aus gemessenen Zahl der Schwingungen der Materiewelle im Ruhesystem K' des Teilchens [5] - pro Zeiteinheit in K. Abb.6 zeigt die Höhenlinien der

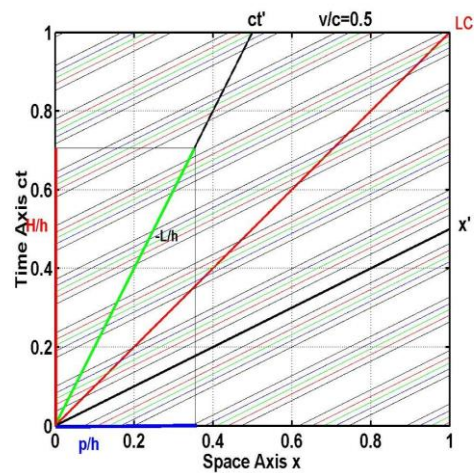


Abb.6 Materiewelle im Minkowski-Diagramm [5]

kowski-Diagramm [5]

Materiewelle über dem Hintergrund eines Quadranten des Minkowski-Diagramms. Phasengeschwindigkeit $v_\phi = c^2/v_g > c$ und Gruppengeschwindigkeit v_g (= Teilchengeschwindigkeit v) der Materiewelle lassen sich in K direkt von der Steigung der x'- bzw. der ct'-Achse ablesen. Ändert sich die Geschwindigkeit des Teilchens, d.h. ist es beschleunigt, so kann man doch stets ein momentanes Inertialsystem wie in Abb.6 definieren - aber das ist eine andere Geschichte.

Literatur

- [1] Cabezas-Rivas, Scrip Frankfurt 2017
- [2] Landau II, §4; [2a] §8
- [3] Ruder; Spez. Relativitätstheorie Kap.3.1
- [4] d'Inverno, Relativitätstheorie; Kap.3.10
- [5] de Vries (Kap. 9&22) <http://physics-quest.org/>

Danksagung

H.S. thanks the John Hauck foundation for ongoing support.
W.D. thanks E.Cabezas-Rivas for her Lecture and Scrip-tum on SR and GR in Frankfurt SS 2017- a great piece of science, didactic and art.