

Strahlen- und wellenoptische Berechnung von Powell-Linsen

Eckhard Langenbach

FISBA AG, St. Gallen

mailto:eckhard.langenbach@fisba.com

Powell-Linsen sind Zylinderlinsen, die ein kollimiertes Strahlenbündel in einer Richtung so auffächern, dass sich im Fernfeld eine linienförmige Rechteckverteilung („Top Hat“) ergibt. Strahlen- und wellenoptische Methoden für die Berechnung des Zylinderlinsenprofils werden vorgestellt und verglichen.

1 Einleitung

Bei den hier vorgestellten Powell-Linsen wird angenommen, dass das einfallende, kollimierte Strahlenbündel eine gaußförmige Verteilung der Bestrahlungsstärke hat und dass in einem vorgegebenen Winkelbereich des Fernfelds die Strahlstärke einen konstanten Wert annimmt.

2 Strahlenoptische Berechnung

Powell-Linsen können als konkave (Abb. 1) oder als konvexe (Abb. 2) Linsen ausgeführt werden.

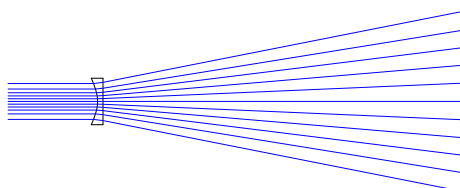


Abb. 1 Schematische Powell-Linse $f < 0$

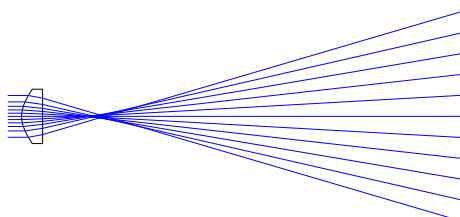


Abb. 2 Schematische Powell-Linse $f > 0$

Die in den beiden Abbildungen dargestellten Strahlen sind so gewählt worden, dass sowohl auf der Eintrittsfläche als auch in der Bildebene zwischen zwei benachbarten Strahlen der gleiche Strahlstrom eingeschlossen wird (Abb. 3). Wegen der gaußförmigen Strahlungsverteilung auf der Eintrittsfläche ergibt sich damit eine mit steigendem Abstand von der Strahlmitte abnehmende Strahldichte. In der Bildebene erzeugen die äquidistanten Strahlen eine konstante Strahlungsverteilung. Diese Formänderung der Strahlungsverteilung wird erreicht durch eine deutliche Überkorrektur des Öffnungsfehlers der Linse (Abb. 4).

Mit Optikrechenprogrammen kann man das Profil der Zylinderfläche dadurch bestimmen, dass man die Eingangsstrahlen wie oben beschrieben vorgibt und die äquidistanten Strahlpositionen oder Strahlrichtungen im Bildraum als Optimierungsziele setzt.

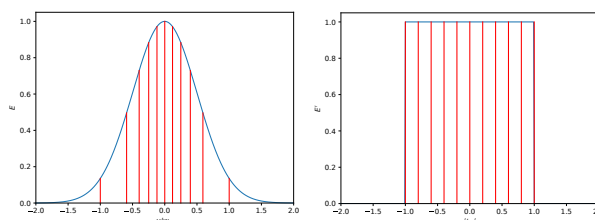


Abb. 3 Strahlungsverteilung und Strahlpositionen in der Eintrittsfläche und in der Bildebene

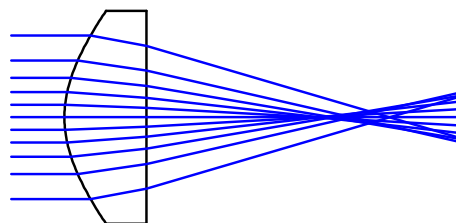


Abb. 4 Öffnungsfehler der Powell-Linse $f > 0$

Bei kleinen Fächerwinkeln kann man das Zylinderlinsenprofil in einer paraxialen Näherung auch analytisch bestimmen. In der Eintrittsfläche der Linse beträgt die Bestrahlungsstärke

$$E(y) = E_0 \cdot e^{-2\left(\frac{y}{w_0}\right)^2}$$

und im bildseitigen Fernfeld soll eine konstante Strahlstärke $I(\varphi(y)) = I_0$ im Winkelbereich $|\varphi| \leq \varphi_{\max}$ erreicht werden. Zu kleinen Abschnitten gehört dann der differentielle Strahlungsfluss

$$d\Phi = E(y) \cdot dy = I(\varphi(y)) \cdot d\varphi = I_0 \cdot \frac{d\varphi}{dy} \cdot dy$$

und daraus ergibt sich die folgende Differenzialgleichung für $\varphi(y)$:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{E(y)}{I_0}$$

Der Ablenkwinkel φ ist proportional zur Flächenneigung $\varphi = (n - 1) \cdot \frac{dz}{dy}$. Dabei ist n die Brechzahl der Linse und $z(y)$ die Pfeilhöhe z beim Achsabstand y . Damit erhält man eine Differenzialgleichung für das Flächenprofil $z(y)$, die für konkrete Anwendungsfälle analytisch oder numerisch gelöst werden kann:

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{E(y)}{(n - 1) \cdot I_0}$$

3 Wellenoptische Berechnung

Die mit der im vorigen Abschnitt beschriebenen strahlenoptischen Methode berechneten Powell-Linsen verhalten sich so wie erwartet, wenn der Fächerwinkel nicht sehr klein ist. Bei sehr kleinen Winkeln wird das Beugungsbild der einzelnen Linsenzonen ähnlich groß wie die angestrebte Strahlungsverteilung, und die Interferenz der Strahlung aus verschiedenen Abschnitten sorgt für Abweichungen von der angestrebten, konstanten Strahlungsverteilung.

Wellenoptisch kann man – von Normierungskonstanten abgesehen – die Fernfeldfunktion $f = A_f \cdot e^{i \cdot \phi_f}$ durch eine Fourier-Transformation \mathcal{F} aus der Pupillenfunktion $p = A_p \cdot e^{i \cdot \phi_p}$ berechnen. Dabei ist jeweils A die Amplitude und ϕ die Phase der komplexen Wellenfunktion. Bei einer Powell-Linse wird durch die gaußförmige Bestrahlungsverteilung die Amplitudenfunktion A_p in der Eintrittspupille vorgegeben, und die angestrebte Rechteckverteilung im Fernfeld bestimmt die Fernfeldamplitude A_f . Aus der noch zu bestimmenden Phasenfunktion ϕ_p in der Pupille kann mit der Beziehung $\phi_p = 2\pi \cdot (n - 1) \cdot z/\lambda$ das Linsenprofil z berechnet werden. Die zunächst unbekanntenen Phasenfunktionen ϕ_p und ϕ_f sind mit einem modifizierten Gerchberg-Saxton-Algorithmus [1] iterativ berechnet worden. Die Startfunktion $\phi_{p,0}$ kann man z. B. aus dem strahlenoptischen Linsenprofil z_0 berechnen, und mit einer Fourier-Transformation \mathcal{F} wird eine erste Fernfeldfunktion berechnet. Diese wird nun durch eine neue Funktion ersetzt, deren Phasenfunktion unverändert bleibt und deren Amplitude der angestrebten Rechteckverteilung entspricht. Mit einer inversen Fourier-Transformation \mathcal{F}^{-1} erhält man eine erste Iteration der Pupillenfunktion. Auch hier wird die Amplitudenfunktion durch die vorgegebene Gauß-Funktion ersetzt, und damit beginnt man den nächsten Iterationsschritt. Nach jeweils etwa 20 Iterationsschleifen haben sich die Funktionen stabilisiert, aber die Fernfeldverteilung weicht zunächst noch deutlich von der angestrebten Rechteckfunktion ab. Deshalb wird nach jeweils 20 Ite-

rationsschleifen – abweichend vom ursprünglichen Gerchberg-Saxton-Algorithmus – die Fernfeldamplitude A_f so modifiziert, dass sich das Iterationsergebnis der Rechteckfunktion annähert. Der gesamte Rechenweg wird durch den folgenden Pseudo-Programmcode beschrieben:

```
for j=1,99
  if j=20,40,60...
    Anpassen von  $A_f$ 
     $f_j = \mathcal{F}(A_p \cdot e^{i \cdot \phi_{p,j-1}})$ 
     $p_j = \mathcal{F}^{-1}(A_f \cdot e^{i \cdot \phi_{f,j}})$ 
```

Damit erhält man für eine Beispiellinse mit 1.2 mrad Fächerwinkel und einer anschließenden Fokussierlinse mit Brennweite 60 mm die in der Abbildung 5 dargestellten Funktionen: Der untere Graph zeigt die Amplitude in der Pupillenebene, in der Mitte wird die Pfeilhöhenfunktion und oben mit der blauen Kurve die Bestrahlungsstärke in der Bildebene dargestellt. Die graue Kurve entspricht der letzten Zielamplitudenfunktion A_f . Die Zielfunktion A_f hat sich deutlich von der anfänglichen Rechteckverteilung entfernt, aber dadurch wird eine sehr gleichmäßige Strahlungsverteilung in der Bildebene erreicht.

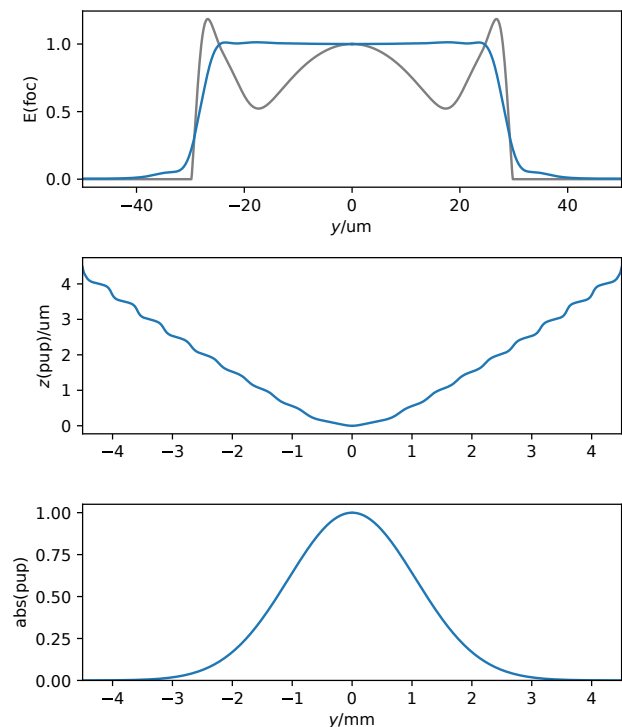


Abb. 5 Iterativ bestimmte Verteilungsfunktionen

Literatur

- [1] R. W. Gerchberg; W. O. Saxton. "A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures," *Optik* **35**, 237–246 (1972)